数理解析研究所講究録
第 807 巻 1992 年 32-42

基本種数 2 以上の 2 次元 Gorenstein 特異点の最小性と Yau 系列

群馬大学医療技術大学部　都丸　正 (Tadashi Tomaru)

序

正規二次元特異点論の発展においては、いくつかの方向があるが、その中の一つに、**M.Artin** [1]、**Ph.Wagreich** [20] において定義された基本サイクル Z、幾何種数 p_g、算術種数 p_a、基本種数 p_f (= 基本サイクルの算術種数 $p_a(Z)$) などの不変量にもとずき特異点を研究するという方向がある。**Artin** による有理二重点の分類と「 (i) $p_g = 0$, (ii) $p_a = 0$, (iii) $p_f = 0$ の 3 条件は同値」などの結果、**Wagreich** による楕円型特異点の定義や、「 (i) $p_a = 1$, (ii) $p_f = 1$ は同値」などの基本的結果を受けて、その後 **H.Laufer, U.Karras, S.S.T.Yau, M.Tomari** などによる楕円型特異点 ($p_a = 1$) の研究がある。以後の話はこの様な流れの中で、特に **Laufer** [9]による **minimally elliptic cycle, Yau** [26]による **elliptic sequence** などに関係した結果が、$p_a \geqq 2$ の場合にどうなるのかを考えることにある。以下で述べる結果のうち、後半の **Yau** 系列に関する部分は実験的結果が大部分をしめるが、その考察から楕円型特異点についての **Yau** の結果は必ずしも楕円型に特有のものではなく、$p_a \geqq 2$ の場合にも類似の現象があることなどが見て取れる。

これらの研究においては東海大学理学部・渡辺敬一先生、金沢大学理学部・泊昌孝氏に数々の助言を頂いたことを記し、感謝したい。

§ 準備

以下、(X, x) はつねに正規 2 次元特異点とする。
$\pi : (\tilde{X}, A) \longrightarrow (X, x)$ を、その特異点解消とする。このとき、$\pi^{-1}(x) = A$ は例外集合で一次元解析集合となるが、$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ を既約分解とする。Dを A の整係数サイクル (i.e., $D = \sum_{i=1}^{n} d_i A_i,\ d_i \in \mathbb{Z}$) とし、$suppD = \bigcup_{d_i > 0} A_i$ とする。 このとき、係数の比較で A 上のサイクルの間に順序が入るが、これを $<$ or $\leq$ で示す。A 上のサイクル D と、$\mathcal{O}(-D)$ に対し、$\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{\tilde{X}} / \mathcal{O}(-D)$ とする。このとき、$\chi(D) = dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_D) - dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_D)$ とすると、$\chi(D) = -\frac{1}{2}(D^2 + DK_{\tilde{X}})$ となる。ただし、 $K_{\tilde{X}}$ は$\tilde{X}$上の canonical sheaf (or divisor) とする。Dの算術種数は $p_g(D) = 1 - \chi(D)$ で定義される。例外集合が具体的に与えられたとき、添加公式 :

$$(1) \qquad \mathrm{K}_{\tilde{X}} A_i = -A_i^2 + 2g(A_i) - 2 + 2\delta(A_i)$$

($g(A_i)$ は A_i の非特異化の種数、$\delta(A_i)$ は A_iの conductor の次数)
から、$p_g(D)$ の値を求めることができる。Zを、$ZA_i \leqq 0$ ($\forall\ i$) を満たす A

上の最小のサイクル とすると、これは常に一意に存在する。これは、基本サイクルと呼ばれる。正規二次元特異点おいて基本的な不変量として、次のものがある。

$$
\begin{aligned}
&p_g = p_g(X,x) = dim_{\mathbb{C}} R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \quad (\text{ 幾何的種数 }),\\
(2)\qquad &p_a = p_a(X,x) = \max_{D\geq 0} p_a(D) \quad (\text{ 算術的種数 }),\\
&p_f = p_f(X,x) = p_a(Z) \quad (\text{ 基本種数 }).
\end{aligned}
$$

これらの不変量は特異点解消の選び方によらず、特異点によって決まる。また、p_a, p_f については位相的不変量であることが定義からわかる。また、p_gについては解析的不変量であることが知られている。これらの間には $p_f \leqq p_a \leqq p_g$のような関係があることが Wagreich [20] により示されている。

［記号］以下において、正の整数 a,b に対し、$(a,b) := g.c.m.(a,b)$ 、及び $\langle a,b\rangle := l.c.m.(a,b)$ とする。また、$a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ を整数、または実数とするとき、

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] := a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_n}}} \quad (\text{ 連分数 })\text{とする。}$$

さらに、実数 a に対し、$[a] := max\{n \in \mathbb{Z} | n \leqq a\}$ (Gauss 記号) 、$\{a\} = min\{n \in \mathbb{Z} | n \geqq a\}$ とする。

§1. 最小サイクル.

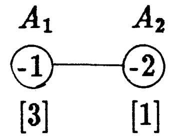
$\pi : (\tilde{X}, A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i) \longrightarrow (X,x)$ を正規二次元特異点の解消とするとき、D を $0 \leq D < Z$なる、A 上のサイクルとする、ただし Z は A 上の基本サイクル。このとき、A 上のサイクルの列：$Z_0 = D, Z_1 = Z_0 + A_1, \ldots, Z_i = Z_{i-1} + A_i, \ldots, Z = Z_l = Z_{l-1} + A_l$ で、$Z_i A_{i+1} > 0$ ($i = \epsilon, \epsilon+1, \ldots, l-1$ ただし、$D > 0$ のとき$\epsilon = 0$ 、$D = 0$ のとき$\epsilon = 1$)。この列を Dから Zへの計算列と呼ぶ。これは Laufer[8]により導入され、一意とは限らないがつねに存在する。

定義 1. Eを A 上の $0 < E \leqq Z$ なるサイクルとする。Eが $p_a(E) = p_f$であり、$D < E$なる任意のサイクルにたいし、$p_a(D) < p_f$ を満たすとき、Eを A 上の最小サイクルと呼ぶ。

命題 2. 任意の正規二次元特異点と、その任意の特異点解消の例外集合にたいし、最小サイクルは常に一意に存在する。

(X,x) が楕円型特異点のとき (i.e., $p_f(X,x) = 1$), E は最小楕円型サイクルに相当する。ただし、$0 < E \leqq Z$ なる条件は楕円型のときは不要であるが、一般には必要であることが次の例 3 で解る。最小サイクルは J. Stevens [15] によって最小特異点解消にたいしすでに定義されている。

例 3（泊）．つぎのような、例外集合をつぶしてできる特異点を考える。



このとき、$Z = A_1 + A_2$であり、$p_f = p_a(Z) = p_a(A_1 + A_2) = 4$ である。Zと$A_1 + A_2$の間に順序関係はないから、定義 1 で"$0 \geqq E \leqq Z$"の条件を落とすと最小サイクルは一意に存在しないことがわかる。

Laufer, Stevens は最小（楕円型）サイクルを **minimal resolution** について定義したが、これは必ずしも **minimal resolution** でなくてもよい。任意の特異点解消は **minimal resolution** から、二次変換を繰り返して得られるから、以下のような事を考える。$\sigma : (\bar{X}, \bar{A}) \longrightarrow (\tilde{X}, A)$ を $p \in A$ を中心とする二次変換とする。A_iを p を含む A の既約成分とするとき$\sigma^* A_i = \bar{A}_i + m_i L$ とする、ただし $L = \sigma^{-1}(p)$, $\bar{A}_i$は A_iの固有変換で、m_iは A_iの p における重複度とする。さらに、サイクル $D = \sum_{i=1}^{n} d_i A_i$にたいし$\sigma^* D = \sum_{i=1}^{n} d_i \sigma^* A_i$ とする。

命題 4． Eを A 上の最小サイクルとし、$p \in Supp E$とする。 このとき、$\sigma^* E - L$ は$\bar{A}$上の最小サイクルとなる。

A 上の $\mathbb{Q}$-係数サイクル Kを $A_i K = A_i K_{\tilde{X}}$ $(\forall i)$ なる関係できまるものとする、これを標準サイクルという。Kが整係数サイクルとなるとき、(X, x) を **numerically Gorenstein** 特異点という。命題 4 を用いて、次の関係が示される。

定理 5． (X, x) は $p_(X, x) \geqq 1$ で、単純楕円型でない **numerically Gorenstein** 特異点とする。A をその **minimal resolution** または **minimal good resolution** の例外集合とする。このとき、A 上で次の関係が得られる：

$$-K \geqq Z + E.$$

(X, x) を正規二次元特異点とするとき、x の十分小さい近傍 $U \subseteq X$をとったとき、$U - x$ 上で零とならない正則二次形式ωが存在するとき、(X, x) を（二次元）**Gorenstein** 特異点という。**Gorenstein** 特異点は正規二次元特異点全体のなかでは特殊な物ではあるが、超曲面あるいは完全交叉などを含む。**Gorenstein** 特異点については多くの結果が知られているが、つぎの定理は幾何種数 2 のときは **Yau** [26], 吉永-大柳 [27]により、一般の場合は渡辺（公）[23]、日高－渡辺（敬）[6]、泊 [17]により、証明されている。

定理 6． (X, x) を $p_g(X, x) \geqq 2$ なる **Gorenstein** 特異点とする。このとき、$p_g(X, x) \geqq p_f(X, x) + 1$ となる。

以下において、**Gorenstein** 性に、定理 5 で等号$-K = Z + E$が成り立つという条件を加えると、定理 6 で p_gが最小値 $p_f + 1$ を取るための十分条件となることを示す（系１０）。

補題 7． $Z_0 = E, Z_1 = E + A_{j_1}, \ldots, Z = Z_l = E + A_{j_1} + \cdots + A_{j_l}$ を E から Z への計算列とすると、A_{j_k} は非特異射影直線で、$Z_{k-1}A_{j_k} = 1$ をみたす（$k = 1, \ldots, l$）。

この補題を用いて、次のような命題を得る。

命題 8．
(i) $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}(-Z)) \simeq H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}(-E))$,
(ii) $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_Z) \simeq H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_E)$,
(iii) $H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{-K-Z}) \simeq H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{-K-E})$ $(i = 0, 1)$.

p_g も p_f もあるコホモロジー群の次元として表現されているが、これらのコホモロジー群の間の計算を適当な計算列をとって、補題７、命題８を用いることにより次を得る。

定理 9． (X, x) を $-K = Z + E$ を満たす正規二次元特異点とすると、$p_g(X, x) \leqq p_f(X, x) + 1$ 。

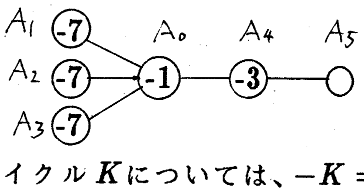
定理６と定理９から、次の系１０を得る。

系 10． (X, x) を $p_g(X, x) \geqq 2$ なる Gorenstein 特異点とする。このとき $-K = Z + E$ を満たすなら、$p_g(X, x) = p_f(X, x) + 1$ となる。

問題 11． 系１０で逆はいえるか。

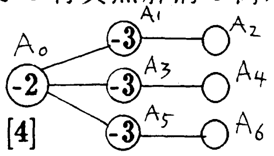
系１０の条件をみたす具体例を２つ述べるが、その前に少し、準備する。$(X, x) = \{f = 0\} \subseteq \mathbb{C}^3$ を擬斉次多項式 f で定義される超曲面孤立特異点とする。よって、(X, x) は $\mathbb{C}^*$－作用をもち、この affine 環 R_X は次数付き環となる。このとき、R_X の n－次 Veronese 部分環に対応する特異点を (X, x) の n－次 Veronese 商という。これは次のようにも解釈できる。f のタイプが $(d; q_0, q_1, q_2)$（i.e., $f(t^{q_0}x_0, t^{q_1}x_1, t^{q_2}x_2) = t^d \cdot f(x_0, x_1, x_2)$ for any $t \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$）のとき、$G$ を $g = (e_n^{i_0}, e_n^{i_1}, e_n^{i_2})$ なる元で生成される有限巡回群とする、ただし $e_n = exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ 。G の $\mathbb{C}^3$ への自然な作用（$g \cdot (x_0, x_1, x_2) = (e_n^{i_0}x_0, e_n^{i_1}x_1, e_n^{i_2}x_2)$）を考えると、これは X 上への作用に制限されるが、このとき商 $(X/G, \bar{x})$ が n-次 Veronese 商となる。

例 12． (X, x) を超曲面特異点 $\{x_0^3 + x_1^7 + x_2^{15} = 0\} \subseteq \mathbb{C}^3$ の６次 Veronese 商とする。このとき、その特異点解消の例外集合は次のようになる。



このとき、標準サイクル K については、$-K = 9A_0 + 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 4A_4 + 2A_5$ となり、基本サイクル Z は $5A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4 + A_5$ となり、最小サイクル E は $4A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4 + A_5$ となる。よってこのとき、系１０の条件を満たし、$p_f(X, x) = 4, p_g(X, x) = 5$ となる。

例 1 3. (X, x) を超曲面特異点 $\{x_0^3 + x_1^6 + x_2^{10} = 0\} \subseteq \mathbb{C}^3$ の 4 次 Veronese 商 とする。このとき、その特異点解消の例外集合は次のようになる。



このとき、標準サイクル K については、$-K = 2A_0 + A_1 + A_2 + A_3$ となり、基本サイクル Z は $A_0 + A_1 + A_2 + A_3$ となり、最小サイクル E は A_0 となる。よってこのとき、系 9 の条件を満たし、$p_f(X, x) = 2,\ p_g(X, x) = 3$ となる。

§2. Yau 系列.

楕円型特異点について S.S.T.-Yau により導入された楕円系列に関する結果は、梅津, X. Yang などによる $\mathbf{P}^3$内の 4 次曲面、5 次曲面に関する研究において有効に用いられている。よって、楕円系列ついて $p_g \geqq 2$ の場合にも類似のことが言えるなら、意味があるように思われる。

定義 1 4. $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ をタイプ $(d; q_0, q_1, \ldots, q_n)$ の擬斉次多項式とする。このとき、ある自然数 a_i について $\dfrac{q_i}{d} = \dfrac{1}{a_i}$ が成り立つとき、fを弱 Brieskorn 型の擬斉次多項式という。(注、$x_0^{a_0} + x_1^{a_1} + \cdots + x_n^{a_n}$を Brieskorn 型の擬斉次多項式という。)

定理 1 5. $(X, x) = \{f = 0\} \subseteq \mathbb{C}^3$ を、重み (a_0, a_1, a_2) の弱 Brieskorn 型の擬斉次多項式で定義されている超曲面孤立特異点とする。このとき、$a_2 \geqq \langle a_0, a_1 \rangle$ ($:= l.c.m.(a_0, a_1)$) がいえるならば、

$$p_f(X, x) = \frac{1}{2}\{(a_0 - 1)(a_1 - 1) - (a_0, a_1) + 1\}.$$

となる。

これに相当することは、Brieskorn 型以外の場合も類似のことがいえる。また、この証明は泊氏による $\mathbb{C}^*$ー作用をもつ特異点の基本種数に関する公式を用いてなされる。定理 1 5 の公式で注意すべきこととして、$a_2 = \langle a_0, a_1 \rangle$ の場合は (X, x) の特異点は種数

$$\frac{1}{2}\{(a_0 - 1)(a_1 - 1) - (a_0, a_1) + 1\}$$

の非特異代数曲線一本で解消されるという事実がある。これらのことは、本研究の結果と代数曲線の退化との何らかのつながりを暗示しているように思われる。J.Stevens などによってなされている、代数曲線の退化族から決まる二次元特異点の研究などとの関連は今後の課題であるが、ここでは Stevens が示した次の事実があることを述べておこう。種数 $g (\geqq 0)$ の代数曲線の退化族の特異ファイバーのある既約曲線の何点かを blowing-up して、特異ファイバーの固有変換の交点行列が負定値であるようにし、これを blowing-down してできる二次元特異点を Kulikov 特異点と呼ぶ (特に、$g = 1$ のときは Kodaira 特異点と呼ぶ)。このとき、Kulikov 特異点の基本種数は gとなる。

以下、a_0, a_1を $\langle a_0, a_1 \rangle \leqq a_2 < 2\langle a_0, a_1 \rangle$ なる自然数とし、$(X, x) = \{x_0^{a_0} +$

$x_1^{a_1} + x_2^{a_2} = 0\} \subseteq \mathbb{C}^3$とおく。このとき、$(X, x)$が楕円型 (i.e., $(a_0, a_1) = (2, 3)$ or (2,4) or (3,3)) がいえるなら (X, x) は Laufer の意味での最小楕円型特異点になることが Laufer [9], Reid [13]の分類によってわかるが、つぎの定理はこれの一般化である。

定理 1 6． (X, x) を重み (a_0, a_1, a_2) の弱 Brieskorn 型擬斉次多項式で定義される超曲面孤立特異点とする。このとき $\langle a_0, a_1 \rangle \leqq a_2 < 2\langle a_0, a_1 \rangle$ で、かつ $p_f(X, x) \geqq 1$ ならば、A を (X, x) の minimal resolution の例外集合とするとき、A 上で基本サイクルと、最小サイクルは一致する。

この証明は、Orlik-Wagreich の擬斉次超曲面特異点に関する結果と、基本サイクルに関するつぎの補題１７、１８を用いてなされる。$\pi : (\tilde{X}, A) \to (X, x)$ を正規２次元特異点の解消とする。このとき $A = \cup_{i=0}^{N} A_i$ は

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \cdots & A_n \\ -b_0 & - \cdots - & -b_n \end{array}$$

のような枝を含むとする。このとき、A_0のみがこれらの $n+1$ 個以外の成分に交わり、その他の $A_1, \cdots, A_n$ はこれ以外に交わらないとする。いま、$\frac{d}{\lambda} = [b_1, \ldots, b_n]$ (連分数) とする、ただし $(d, \lambda) = 1$ 。このとき、$c_0 = d, c_1 = \lambda$とし、さらに $c_2, c_3, \ldots, c_n$ を $c_{i+1} = b_i c_i - c_{i-1}$ ($1 \leqq i \leqq n-1$) なる関係で決まる自然数列とする。よって、$c_n = 1$ および $c_{i+1} < b_i$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ となる。このとき、

補題 1 7． A上の基本サイクル Zの A_0 上の係数が ds (s 自然数) のとき、A_i上 Zの係数は sc_i となる ($i = 1, \ldots, n$)。とくに、$ZA_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$ 。

上の状況で、l, μを、$\mu d - \lambda l = 1$ および、$0 < \mu < d$ をみたす整数とする。$(d - l)\lambda \equiv 1 \bmod d$ だから、$\frac{d}{d-l} = [b_n, \ldots, b_1]$となり、従って、$\frac{l}{d-l} = [b_n - 1, b_{n-1}, \ldots, b_1]$となる。また、$\mu(d-l) \equiv 1 \bmod l$ だから、$\frac{l}{\mu} = [b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n - 1]$となる。さらに、$e_0 = l, e_1 = \mu$ とし、$e_2, \ldots, e_n$を $e_i = b_{i-1}e_{i-1} - e_{i-2}$ $(i = 2, \ldots, n)$ で定義する。よって、$e_{n-1} = b_n - 1, e_n = 1$ となる。このときつぎが言える。

補題 1 8． (i) A 上 Zの係数が lとすると、A 上 Zの係数は e_i $(i = 1, \ldots, n)$ となる。特に、$ZA_i = 0 (i = 1, \ldots, n-1)$ 、$ZA_n = -1$ となる。

(ii) もし、$[\frac{d}{l}] = 1$ ならば $b_n \geqq 3$ となる。

定義 1 9． $(\tilde{X}, A) \to (X, x)$ を minimal good resolution とする。Z, Eをそれぞれ、基本サイクル、最小サイクルとする。$ZE < 0$ のとき、Yau 系列を $\{Z\}$ とする。いま、$ZE = 0$ とする。このとき、A の既約成分から構成される連結一次元解析集合で、その任意の既約成分 A_iにたいし $A_i Z = 0$ を満たすものを考え、その最大の一次元解析集合を B_1と置く。このとき、$Z^2 < 0$ から $B_1 \subseteq A$ がわかる。$Z_{B_1}E < 0$ ならば Yau 系列を $\{Z, Z_{B_1}\}$ とする、ただし Z_{B_1}は B_1上の基本サイクル。いま、$ZE = 0$ とする。このとき、B_1の既約成分から構成される連結一次元解析集合で、その任意の既約成分 A_iにたいし $A_i Z_{B_1} = 0$ を満

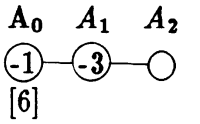
たすものを考え、そのうち最大のものを B_2と置く。このとき、$B_2 \subseteq B_1$がわかる。$Z_{B_2}E < 0$ ならば Yau 系列を $\{Z, Z_{B_1}, Z_{B_2}\}$ とする。以下、この操作を続けると、例外集合 A の既約成分の個数は有限より、この操作も有限で終わる。このようにして得られた列 $\{Z_{B_0} = Z, Z_{B_1}, \ldots, Z_{B_m}\}$ を Yau 列といい、$m+1$ を Yau 系列の長さという。このとき、$p_f(X_{B_1}, x_1) = \cdots = p_f(X_{B_m}, x_m) = p_f$ がつねに言えることを注意しておく。

$\{Z_{B_0} = Z, Z_{B_1}, \ldots, Z_{B_m}\}$ が Yau 系列のとき、A の成分で B_mに含まれないもので作られる部分集合をこの Yau 系列の消去部分ということにする。Yau 系列は楕円型特異点については楕円系列であるが、Yau は楕円系列について種々の結果を示した。そのうち特に重要なものに次の結果がある：(X, x) を numerically Gorenstein 特異点とするとき、$-K = \sum_{i=0}^{m-1} Z_{B_i} + E$ (cf. [26], Theorem 3.7)。この事実は、各 i について$-K_{B_i} - (-K_{B_{i+1}}) = Z_{B_i}$ がいえることから導かれる。ただし、K_{B_i}は B_i上の標準サイクル。$p_f \geqq 2$ を満たす特異点についても同様に次のような性質を考えることが出来る。

(3) $$-K_{B_i} - (-K_{B_{i+1}}) = cZ_{B_i} \ (i = 0, 1, \ldots, m-1),$$

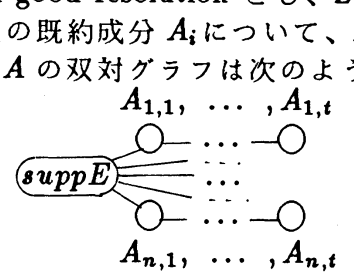
ここで、$c \in \mathbb{Q}$ は適当な正の有理数。しかしながら、この性質は一般には成立しない。

例 20. $(X, x) = \{x_0^3 + x_1^7 x_2 + x_2^{35} = 0\} \subseteq \mathbb{C}^3$なる超曲面特異点を考えると、特異点解消は次のようになる。



このとき、$-K_A = 19A_0 + 8A_1 + 4A_2, Z = Z_A = A_0 + A_1 + A_2, E = A_0$がわかり、よって $B_1 = A_0 \cup A_1, -K_{B_1} = 17A_0 + 6A_1, Z_{B_1} = A_0 + A_1$がわかる。よって、$(X, x)$ は上の性質を満たさない。しかし、次のように状況を強く限定すれば、(3) について次のようなことが言える。

命題 21. $p_f(X, x) \geqq 1$ とし、Yau 系列の長さを $t+1$ とする。$(\tilde{X}, A) \to (X, x)$ を minimal good resolution とし、$Z_{B_m} = E$とする。このとき、$suppE$ に含まれない任意の既約成分 A_iについて、$A_i^2 = -2$ で Zの A_i上の係数は 1 とする。このとき、A の双対グラフは次のようになる。



$(\ n = -Z^2 \ ).$

さらに、(X, x) は次の (i) か (ii) を満たすようにする。

(i) (X,x) の Yau 系列は、その消去部分の連結成分が 1 つである。

(ii) (X, x) の例外集合は星型グラフであり、その（巡回）枝のうち Yau 系

列に交わるものの、タイプは同一。

このとき、 $-K_{B_i}-(-K_{B_{i+1}})=\dfrac{2p_f-2+n}{n}Z_{B_i}$ （ $i=0,1,\ldots,t-1$ ）。

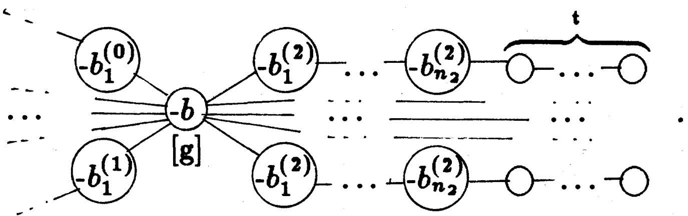
実際に、上のような条件を満たす具体例として以下のような超曲面特異点のつくる族を考える。a_0,a_1,a_2 を $2\leqq a_0\leqq a_1$及び $\langle a_0,a_1\rangle\leqq a_2<2\langle a_0,a_1\rangle$ を満たす自然数とする。さらに、$f_t=x_0^{a_0}+x_1^{a_1}+x_2^{a_2+\langle a_0,a_1\rangle t}$ とし、$(X_t,x_t)=\{f_t=0\}\subseteq\mathbb{C}^3$とする、ただし、$t$ 非負整数。このとき、次のような特異点の系列$\Sigma(a_0,a_1,a_2)$ を考える。

(4) $$\Sigma(a_0,a_1,a_2):=\{(X_t,x_t)|t=0,1,2,\ldots\}.$$

定理１５から任意の t について、$p_f(X_t,x_t)=p_f(X_0,x_0)$ がいえ、定理１５から (X_0,x_0) は最小特異点解消上では基本サイクルと最小サイクルが一致することがいえる。Yau は楕円系列の具体例としてこの種のものを掲げている:[26], Example 4,5,6 and 7、これらは上の記号でいうと$\Sigma(2,3,9),\Sigma(2,3,11),\Sigma(3,3,4),\Sigma(3,3,5)$ にそれぞれ対応している。$\Sigma(a_0,a_1,a_2)$ に対して、Yau の結果を一般化して、次のような結果を得ることができる。

定理２２． a_0,a_1,a_2 を $2\leqq a_0\leqq a_1,\langle a_0,a_1\rangle\leqq a_2<2\langle a_0,a_1\rangle$ を満たす自然数とする。

(i) $(X_t,x_t)\in\Sigma(a_0,a_1,a_2)$ に対応している双対グラフは次のようになる。



よって、(X_t,x_t)Yau 系列の長さは $t+1$ となる。

(ii) $\{Z,Z_{B_1},\ldots,Z_{B_{t-1}},Z_{B_t}\}$ を (X_t,x_t) の Yau 系列とする。このとき、
$$(X_{B_i},x_{t_i})=(X_{t-i},x_{t-i})\in\Sigma(a_0,a_1,a_2)\text{ for }i=0,1,\ldots,t,$$
となる。ただし、(X_{B_i},x_i) は B_iを blowing-down して得られる特異点。

(iii) K_tと Z_tをそれぞれ、(X_t,x_t) の minimal good resolution 上の標準サイクル、基本サイクルとするとつぎがいえる。
$$-K_t-(-K_{t-1})=\frac{a_0a_1-a_0-a_1}{(a_0,a_1)}Z_t \quad (\ t=1,2,\ldots\ ),$$

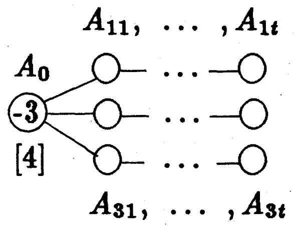
(iv) $(Y,y)=\{x_0^{a_0}+x_1^{a_1}+x_2^{<a_0,a_1>}=0\}\subseteq\mathbb{C}^3$とおくと、
$$p_g(X_t,x_t)-p_g(X_{t-1},x_{t-1})=p_g(Y,y)\quad (\ t=1,2,\ldots\ ),$$
よって、$p_g(X_t,x_t)-p_g(X_{t-1},x_{t-1})$ は、t,a_2 によらず一定である。なお、(Y,y) はさきに述べたが、種数が$\frac{1}{2}\{(a_0-1)(a_1-1)-(a_0,a_1)+1\}$ の非特異代数曲線一本で解消される。

以下に、$\Sigma(3,6,a_2),a_2=6,\cdots,11$ の場合を計算した結果を示す。これらの

結果から、a_2が固定されている場合は t が変化してできる特異点の族は一つの”家族” のような感じであり、a_2が変化する場合、6 個の族は一見、そう関係がありそうにも見えないが、上のような意味で”親戚”関係にあるといえる。特異点の分類を行なう際、通常は解析的、位相的同値性から行なう。しかし、次の例で、a_2を固定しても t が異なれば 2 つの特異点は位相的に同値でない。しかし、この 2 つの特異点は兄弟のようなものである。このような分類の観点からみても Yau 系列を通して上のような関係を考察することは、新たな意味があると思われる。

例 2 3． $\Sigma(3,6,a_2)$ については、定理 1 5 より $p_f(X,x)=4$。

$a_2 = 6$

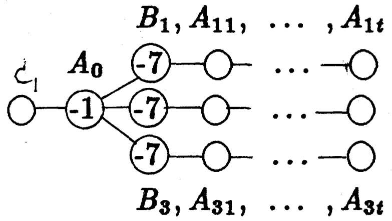


$-K = 3(t+1)A_0 + 3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{t}(t-j+1)A_{ij}$,

$Z = A_0 + \sum_i\sum_j A_{ij}$, $E_0 = A_0$

$p_a = 3t+4$, $p_g = 7t+7$

$a_2 = 7$

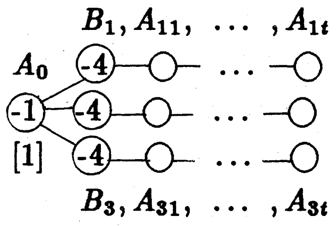


$-K = (18t+6)A_0 + (9t+8)C_1 + 3\sum_{i=1}^{3}(t+1)B_i$
$+ 3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{t}(t-j+1)A_{ij}$,

$Z = 6A_0 + 3C_1 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{t}A_{ij}$

$p_a = 3t+4$, $p_g = 7t+7$

$a_2 = 8$

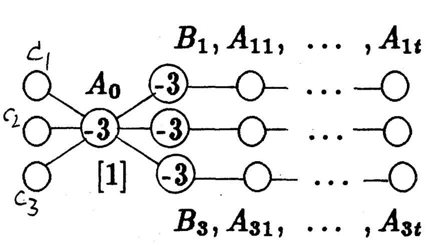


$-K = (9t+1)A_0 + 3\sum_{i=1}^{3}(t+1)B_i$
$+ 3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{t}(t-j+1)A_{ij}$,

$Z = 3A_0 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{t}A_{ij}$,

$p_a = 3t+4$, $p_g = 7t+8$

$a_2 = 9$

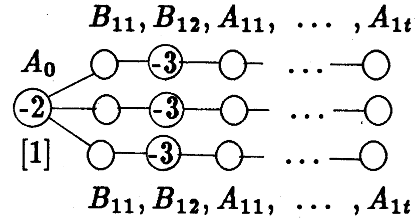


$-K = (6t+8)A_0 + 3\sum_{i=1}^{3}(t+1)B_i + (3t+4)\sum_{i=1}^{3}C_i$
$+ 3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{t}(t-j+1)A_{ij}$,

$Z = 2A_0 + \sum_{i=1}^{3}(B_i + C_i + \sum_{j=1}^{t}A_{ij})$

$p_a = 3t+4$, $p_g = 7t+9$.

$a_2=10$

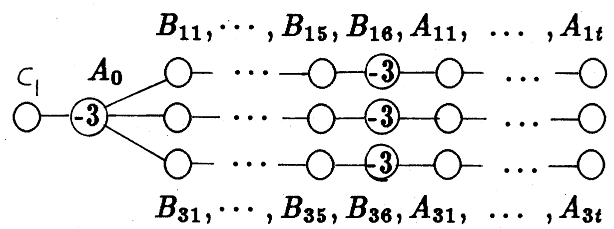


$$-K=(9t+4)A_0+\sum_{i=1}^{3}\left((6t+8)B_{i1}+(3t+1)B_{i2}\right)+3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{t}(t-j+1)A_{ij},$$

$$Z=3A_0+\sum_{i=1}^{3}\left(2B_{i1}+B_{i2}+\sum_{j=1}^{t}A_{ij}\right),$$

$$P_a=3t+5,\quad P_g=7t+10$$

$a_2=11$



$$-K=(18t+28)A_0+(9t+14)C_1+\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{j=1}^{5}\left((18-3j)t+28-5j\right)B_{ij}\right\}+3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{t}(t-j+1)A_{ij},$$

$$Z=6A_0+3C_1+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(6-j)B_{ij}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{t}A_{ij}$$

$$P_a=3t+5,\quad P_g=7t+10$$

参考文献

[1]. M. Artin. On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math. 88 (1963), 129-138.

[2]. W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, Compact complex surfaces, Springer-Verlag, (1984).

[3]. E. Brieskorn, Rationale Singularitäten komplexer Flächen, Invent. Math., 4 (1969), 336-358.

[4]. M. Demazure, Anneaux gradués normaux, in Séminaire Demazure-Giraud -Teissier, Singularites des surfaces, École Polytechnique (1979).

[5]. I.V. Dolgachev, Weighted projective varieties, Group Actions and Vector Fields (Proc. Polish-North Amer. Sem., Vancouver, (1981) Lecture Notes in Math.,956, Springer-Verlag, (1982), 34-71.

[6]. F. Hidaka and K-i. Watanabe, Normal Gorenstein surfaces with ample canonical divisor, Tokyo J. Math., 4 (1989),319-330.

[7]. H. Laufer, Normal two-dimensional singularities, Ann. of Math. Stud., No 71, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.,(1971).

[8]. H. Laufer, On rational singularities, Amer. J. Math. 94 (1972), 597- 608.

[9]. H. Laufer, On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math. 99, No6 (1977), 1257-1295.

[10]. M. Oka, On the Resolution of the Hypersurface Singularities, Adv. Stud. in Pure Math., 8 (1986), 405-436.

[11]. P. Orlik and P. Wagreich, Isolated singularities of algebraic surface with $\mathbb{C}^*$-action, Ann. of Math., 93 (1971), 205-228.

[12]. H. Pinkham, Normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$-action. Math. Ann., 227 (1977), 183-193.

[13]. M. Reid, Elliptic Gorenstein singualrities of surfaces, Preprint, 1978.

[14]. O. Riemenschneider, Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen), Math. Ann., 209 (1974), 211-248.

[15]. J. Stevens, Kulikov Singularities, Thesis, 1985.

[16]. M. Tomari, A p_g-Formula and Elliptic Singularities, Publ. Res. Inst. Math. Scien., Kyoto Univ. 21 (1985), 297-354.

[17]. M. Tomari, Maximal-Ideal-Adic Filtration on $R^1\phi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ for Normal Two-Dimensional Singularities, Adv. Stud. in Pure Math., 8 (1986), 633-647.

[18]. M. Tomari and K-i. Watanabe, Filtered Rings, Filtered Blowing-Ups and Normal Two-Dimensional Singularities with "Star-Shaped" Resolution. Publ. Res. Inst. Math. Soc., Kyoto Univ., 25 (1989), 681-740.

[19]. T. Tomaru, Cyclic quotients of 2-dimensional quasi-homogeneous hypersurface singularities. (to appear in Math. Z.).

[20]. P. Wagreich, Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math. 92 (1970), 421-454.

[21]. K-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, Nagoya Math. J., 83 (1981), 203-211.

[22]. Ki. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities I, Math. Ann., 250 (1980), 65-94.

[23]. Ki. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities II, Adv. Stud. in Pure Math., 8 (1986), 671-685.

[24]. S.S.-T. Yau, Normal two-dimensional elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., 254 (1979), 117-134.

[25]. S.S.-T. Yau, On strongly elliptic singularities, Amer. J. Math., 101 (1979), 855-884.

[26]. S.S.-T. Yau, On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., (2), 257 (1980), 269-329.

[27]. E. Yoshinaga and S. Ohyanagi, A crieterion for 2-dimensional normal singularities to weakly elliptic, Sci. Rep. Yokohama National Univ., Sec 2, 26 (1979), 5-7.

College of Medical Care and Technology
Gunma University
Maebashi, Gunma 371, Japan